

Métodos topológicos en el análisis no lineal

Clase 24, 2/12 - Versión preliminar

A promediar, a promediar, que la orquesta se va

A esta altura de los acontecimientos, uno podría pensar que es muy tarde ya, para volver llorando atrás. Pero vale la pena, tal vez sin tanto dramatismo, volver al método de averaging que vimos en la clase 14.¹ En aquel momento, nuestra principal herramienta fue un tal teorema de la función implícita. Pero algo se dijo también, no de una esquina pero sí de un grado (topológico, para más datos). Para un sistema de ecuaciones ordinarias, el problema se suele presentar en la forma

$$u'(t) = \varepsilon f(t, u(t), \varepsilon) \quad (1)$$

donde $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ es continua y T -periódica en t . Si escribimos $N_\varepsilon u = f(\cdot, u, \varepsilon)$ entonces ya no es novedad si decimos que para $\varepsilon \neq 0$ la ecuación equivale al siguiente problema en C_T :

$$u = \bar{u} + \overline{N_\varepsilon u} + \varepsilon K(N_\varepsilon u - \overline{N_\varepsilon u}). \quad (2)$$

Lo que cambia es el hecho de que ahora no pretendemos llegar hasta $\varepsilon = 1$ (¡faltaba más!) sino que se trata de garantizar la existencia de soluciones para ε chico, tal como su nombre hacía presagiar. El asunto es que cuando $\varepsilon = 0$ cualquier constante es solución de la ecuación original, pero no de (2), cuyas soluciones también son constantes, pero ya no cualquiera sino precisamente aquellas que satisfacen $\overline{N_0 u} = 0$. En otras palabras, se trata de los ceros de la función $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por

$$\phi(u) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t, u, 0) dt.$$

De esta forma, el problema consiste en encontrar un cero u_0 de la función ϕ que se pueda ‘continuar’ para ε cercano a 0. Y en su momento, lo que usamos fue el teorema de la función implícita, poniendo como condición que la diferencial $D\phi(u_0)$ fuera inversible; ahora, como todos sospechan, la condición es que el grado de ϕ sea distinto de 0 en algún abierto acotado $U \subset \mathbb{R}^n$ tal que $u_0 \in U$.

¹Cabe aclarar que esto no guarda relación con el penado 14, aquel que rogaba al juez de turno que trajeran a su madre (la del preso, no la del juez).

Cabe hacer aquí un breve repaso, ya que en los teoremas de continuación, estábamos acostumbrados a hacer al revés: fijar primero un abierto acotado $\Omega \subset C_T$ tal que la homotopía no se anule sobre $\partial\Omega$ y entonces mirar el grado de ϕ en $\Omega \cap \mathbb{R}^n$. En este caso tenemos ya este último conjunto, así que lo razonable es definir

$$\Omega := \{u \in C_T : u(t) \in U \text{ para todo } t\}.$$

Y ya no hay más preocupaciones por las posibles homotopías que puedan andar por ahí anulándose: si definimos como siempre

$$F_\varepsilon u := u - (\bar{u} + \overline{N_\varepsilon u} + \varepsilon K(N_\varepsilon u - \overline{N_\varepsilon u})),$$

entonces el hecho de que $F_0 = 0$ en $\partial U = \partial\Omega \cap \mathbb{R}^n$ es suficiente para asegurar que F_ε no se anula en $\partial\Omega$ si ε es chico. Esto merece una breve explicación, ya que $\partial\Omega$ no es compacto, pero también es cierto que F no es cualquier función continua. El argumento es el mismo que ya hemos dado en otras ocasiones, incluso un poco más sencillo: si existe $u_n \in \partial\Omega$ tal que $F_{r_n} u_n = 0$ para cierta sucesión $r_n \rightarrow 0$, tomando una subsucesión podemos suponer que $\bar{u}_n + \overline{N_{r_n} u_n}$ converge a cierto $v \in \mathbb{R}^n$. Pero entonces $u_n \rightarrow v$ y vale $v = v + \overline{N_0 v}$, es decir, $\phi(v) = 0$. Esto es absurdo, porque $v \in \partial\Omega$. En resumen, tenemos el siguiente resultado:

Proposición 0.1 *Sean f y ϕ como antes. Si existe $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto acotado tal que $\deg(\phi, U, 0) \neq 0$, entonces existe $\varepsilon^* > 0$ tal que el problema (1) tiene al menos una solución $u \in C_T$ tal que $u(t) \in U$ para todo t .*

Una aplicación interesante es el problema de Kepler en el plano

$$u''(t) - \frac{u(t)}{|u(t)|^3} = p(t)$$

donde $p \in C_T(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ tiene promedio 0. Se trata de un problema singular, en el término no lineal no está definido en el origen, situación que puede traer más de algún dolor de cabeza: como mínimo, uno puede ver arruinada desde el vamos cualquier perspectiva de usar el teorema de Schauder en $B_R(0)$. Una observación muy simple, debida a Solimini [2], muestra que no puede haber soluciones si la norma de p es chica. En efecto, si u es solución, multiplicando la ecuación por u e integrando, se obtiene

$$-\int_0^T |u'(t)|^2 dt - \int_0^T \frac{1}{|u(t)|} dt = \int_0^T p(t)u(t) dt$$

y entonces

$$\frac{T}{\|u\|_\infty} \leq \int_0^T \frac{1}{|u(t)|} dt < \|u\|_\infty \|p\|_{L^1},$$

es decir:

$$\|u\|_\infty > \sqrt{\frac{T}{\|p\|_{L^1}}}.$$

Pero además, como $\bar{p} = 0$ vale

$$\int_0^T |u'(t)|^2 dt < \left| \int_0^T p(t)u(t) dt \right| = \left| \int_0^T p(t)[u(t) - \bar{u}] dt \right| \leq \|p\|_{L^1} \|u - \bar{u}\|_\infty$$

y por aquella desigualdad de Sobolev (¿te acordás hermano, lo linda que era?) que vimos en la clase 3, resulta

$$\|u - \bar{u}\|_\infty < \frac{T}{12} \|p\|_{L^1}.$$

Esto quiere decir que si fuera $|\bar{u}| \geq \frac{T}{12} \|p\|_{L^1}$, entonces la imagen de u estaría contenida en una bola que no contiene al origen; en particular, tendría que existir $w \in \mathbb{R}^n$ tal que $u(t)w > 0$ para todo t . Pero esto es absurdo, porque integrando la ecuación se ve que

$$\int_0^T \frac{u(t)}{|u(t)|^3} dt = 0.$$

En consecuencia,

$$\|u\|_\infty \leq |\bar{u}| + \frac{T}{12} \|p\|_{L^1} < \frac{T}{6} \|p\|_{L^1}$$

y yo sé que ahora vendrán cotas extrañas: en efecto, de lo anterior se deduce que

$$\sqrt{\frac{T}{\|p\|_{L^1}}} < \frac{T}{6} \|p\|_{L^1},$$

es decir

$$\|p\|_{L^1}^3 > \frac{36}{T}.$$

Lo que vamos a ver ahora es una suerte de recíproca, que puede expresarse en términos de un parámetro: para cualquier $p_0 \neq 0$, el problema con $p = sp_0$ tiene soluciones si s es suficientemente grande. Y esto del parámetro explica qué pito toca el averaging en todo esto: mediante un cambio de variables apropiado, el s grande se transforma en un ε chico. Para esto, podemos elegir $\gamma \in C_T$ tal que $-\gamma''(t) = p_0(t)$ y definir

$$x(t) := \frac{u(t)}{s} + \gamma(t).$$

De esta forma, el problema se transforma en

$$x''(t) = \frac{u''(t)}{s} - p_0 = \frac{u(t)}{s|u(t)|^3} = \varepsilon \frac{x(t) - \gamma(t)}{|x(t) - \gamma(t)|^3}$$

donde $\varepsilon := s^{-3}$. Cabe observar ahora que γ , como buena función periódica, es una curva cerrada; por la singularidad, las soluciones (clásicas) que buscamos no pueden cortarse con la imagen de γ ; en consecuencia, tienen que vivir en alguna componente conexa de su complemento. Es un hecho conocido (y fácil

de probar) que existe una única componente conexa no acotada; aunque sea claro desde el punto de vista intuitivo, no es tan sencillo verificar que siempre hay también alguna que es acotada. El resultado, quizás llamativo, es que en cada una de tales componentes conexas acotadas de $\mathbb{R}^2 \setminus \text{Im}(\gamma)$ se puede encontrar, si ε es chico, al menos una solución. Si la curva es medio fulera la cantidad de componentes acotadas podría ser infinita, aunque esto no implica necesariamente que hay infinitas soluciones, ya que el ε requerido podría hacerse cada vez más chico. Pero lo que es cierto es que si hay N componentes conexas acotadas, entonces existe s^* tal que para $s > s^*$ el problema tiene al menos N soluciones distintas.

La idea de la demostración es la siguiente: de acuerdo con el anterior cambio de variables, si $\hat{U}$ es una de tales componentes, alcanza con encontrar un abierto $U \subset \hat{U}$ tal que $\deg(\phi, U, 0) \neq 0$, donde $\phi : \hat{U} \rightarrow \mathbb{R}^2$ está dada por

$$\phi(x) := \frac{1}{T} \int_0^T \frac{x - \gamma(t)}{|x - \gamma(t)|^3} dt.$$

Esta es una función de $\mathbb{R}^2$, aunque su grado no parece tan fácil de calcular. Sin embargo (como dice el tango), fue un momento, pero pude serenarme y me dije bien tranquilo: ϕ es un gradiente. Concretamente $\phi = -\nabla G$, donde

$$G(x) := \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{|x - \gamma(t)|} dt.$$

La siguiente pregunta es por qué esto debería alegrarnos, a lo que podemos responder, todavía haciéndonos un poco los misteriosos: porque $G(x) \rightarrow +\infty$ para $x \rightarrow \partial \hat{U}$. La explicación de este último hecho es sencilla: supongamos que $x \rightarrow x_0 := \gamma(t_0)$, entonces por valor medio se tiene:

$$|\gamma(t) - x| \leq |x - x_0| + C|t - t_0|$$

para cierta constante C . Esto quiere decir que

$$G(x) \geq \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{|x - x_0| + C|t - t_0|} dt \rightarrow +\infty.$$

La conclusión ahora es similar a lo que vimos en la clase 10, cuando vimos que si una función tiende a infinito, entonces el grado de su gradiente es 1 sobre cualquier bola de radio $R \gg 0$. La diferencia es que ahora la función G no está definida en todo $\mathbb{R}^n$ y, además, la cuenta que hicimos entonces requería una condición adicional, que el gradiente no se anulara fuera de un compacto. Sin embargo, sin entrar en detalles técnicos, podemos dar un esbozo de la prueba que aparece en [1]. En primer lugar, es fácil convencerse de que $\hat{U}$ es simplemente conexo. Esto significa que cualquier curva cerrada es homotópica a una constante o bien (en criollo): $\hat{U}$ no tiene agujeros. Una explicación posible surge de observar que, una vez fijada la curva, se puede suponer que γ es una poligonal y entonces $\hat{U}$ es el interior de un polígono simple, que por inducción se puede

llevar a un polígono convexo. El segundo paso, un poco más duro, consiste en tomar un valor regular $\alpha \in G(\tilde{U})$. Esto existe, claro está, por el lema de Sard y como G se va a infinito se deduce que $G^{-1}(\alpha) \cap \tilde{U}$ es compacto. Pero no solo eso (aquí la parte no trivial): es una unión disjunta de una familia finita de curvas suaves cerradas simples (de Jordan, bah). Si llamamos U al interior de una de esas curvas, entonces $\nabla G|_{\partial U}$ apunta siempre hacia adentro o siempre hacia afuera de U . Más precisamente $\frac{\nabla G}{|\nabla G|} = \pm \nu$, donde ν es la normal exterior, lo que prueba que $\deg(\nabla G, U, 0) = 1$.

Esto último no es en realidad ninguna tontería y generaliza aquello que vimos desde el comienzo respecto de campos que apuntan hacia afuera (o hacia adentro) de una región. El tema es que nuestros devaneos filosóficos no iban más allá de una bola, para la versión “campera” de Brouwer o un cuadrado, en el caso de Poincaré-Miranda. El resultado general, debido a Hopf, dice que para cualquier abierto acotado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ con frontera suave el grado de la normal exterior coincide con la llamada *característica de Euler* del abierto, tal como mencionamos en la clase 9.² Para una región simplemente conexa, la característica de Euler es 1, aunque el grado de la normal no siempre es tan fácil de calcular. Si la región es convexa y (por simplicidad) suponemos que contiene al origen, entonces el resultado es evidente, porque la normal es homotópica a la identidad: eso es exactamente lo que hicimos cuando probamos Brouwer y sus equivalencias. Pero el panorama es algo más turbio si la región es más rebuscada: por ejemplo, en la Figura 2 se ve que la normal exterior ν viola los preceptos básicos del buen paseador de perros, ya que hay algún punto x tal que el segmento que lo une con $\nu(x)$ pasa por el origen.

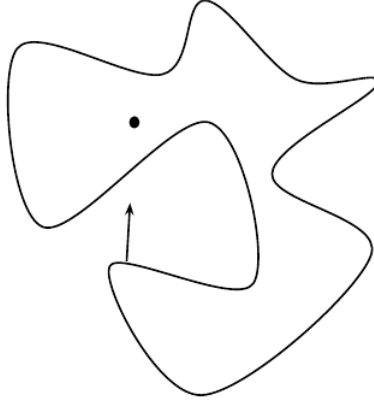


Figura 2: Perro escondido detrás del origen

²Recordemos que, de acuerdo con nuestra definición, el grado de la normal, que en principio está definida solo en el borde, se piensa directamente como el grado de (cualquier) extensión continua a todo el dominio.

De todas formas, en el plano se puede dar una explicación informal, similar a la que vimos en su momento para entender el significado del índice de una curva. Supongamos por ejemplo que $\eta : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ es una curva cerrada regular simple, entonces la normal exterior en $z = \eta(t)$ se obtiene rotando 90° el vector tangente $\eta'(t)$.³ Si la curva está orientada en sentido positivo, entonces alcanza con multiplicar este vector por $-i$. Claro que habría que normalizarlo, es decir, dividir por $|\eta'(t)|$ pero, a los fines de calcular el índice, esto no hace falta.

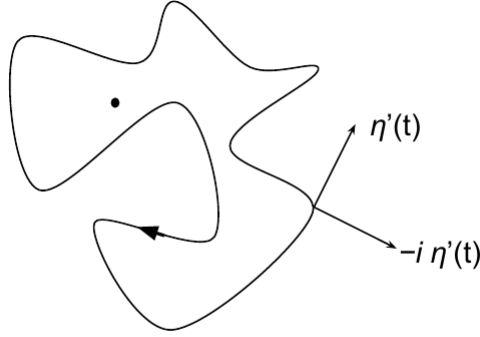


Figura 3: El vector normal en estado salvaje

Entonces el grado de la normal es justamente el índice de la curva $-i\eta'(t)$, que se calcula mediante la integral

$$\frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{\eta''(t)}{\eta'(t)} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$$

Pero el integrando es la derivada de la función $\arctan\left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right)$, que no está definida en aquellos puntos donde la tangente es vertical. Como hicimos otras veces, se puede suponer que esos puntos forman una secuencia finita $0 \leq t_0 < \dots < t_N \leq 1$; si llamamos $t_{N+1} = t_0 + T$ entonces la integral se calcula sumando las integrales en los intervalos $[t_j, t_{j+1}]$ para $j = 0, \dots, N$. Por ejemplo, si en cierto t_j la curva apunta hacia abajo y luego dobla a la derecha, entonces

$$y'(t_j) < 0, \quad x'(t_j^+) = 0^+,$$

de modo que

$$\arctan\left(\frac{y'(t_j^+)}{x'(t_j^+)}\right) = -\frac{\pi}{2}.$$

³Cabe aclarar que la regularidad no solo significa que $\eta' \neq 0$ sino que, además, $\eta'(0) = \eta'(1)$, de modo que la curva sea suave en todo punto.

Si $y'(t_{j+1})$ es positivo, entonces

$$\arctan\left(\frac{y'(t_{j+1})}{x'(t_{j+1})}\right) = \frac{\pi}{2}$$

y ese tramo de la integral da por resultado $\frac{1}{2}$; en cambio, si vuelve a ser negativo, entonces la integral da 0. Analizando los diferentes casos, se ve que cada pedacito de la integral aporta $\pm\frac{1}{2}$, cuando las flechitas apuntan en sentido contrario, o 0, cuando apuntan hacia el mismo lado. Pero al final del día (mejor dicho, del intervalo) todos los valores se van cancelando salvo dos, y cada una de ellas corresponde a media vuelta antihoraria, de donde se ve que el resultado es 1.

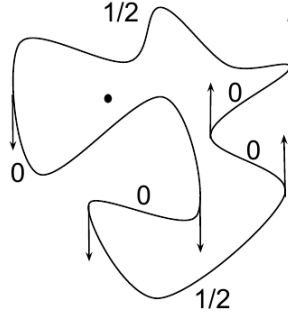


Figura 4: Teorema de Hopf, versión elemental

Mirando el dibujo, queda claro que esto hay que hacerlo con cierto cuidado, tarea que queda a cargo del lector. A grandes rasgos, digamos que un (algo dudoso) argumento inductivo permite suponer que las flechitas que suben y bajan se alternan; en tal caso, se desafía a los más tauras a encontrar una curva simple donde haya más de un par de esas flechitas.

Pero antes de terminar y entregarnos al esplín, vamos a hacer un último comentario con el mejor de los ánimos geométricos. Como se puede observar, en el cálculo anterior usamos solamente el hecho de que la normal es un múltiplo (complejo) de γ' , es decir, algo de la forma $c\gamma'(t)$, con $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Pero la constante c no importa en absoluto, ya que en el cálculo del índice se cancela. En otras palabras, daba lo mismo si tomábamos $c = 1$, lo que corresponde al grado del campo tangente $\gamma'(t)$. ¡Vaya sorpresa! Sin embargo, no se trata de una casualidad sino de un hecho que vale en general: si $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es un abierto acotado con frontera suave, entonces la normal $\nu(x)$ es linealmente homotópica a cualquier campo $T(x)$ de vectores tangentes que no se anula en ningún punto. En efecto, alcanza con observar que

$$\langle \lambda \nu(x) + (1 - \lambda)T(x), \nu(x) \rangle = \lambda \langle \nu(x), \nu(x) \rangle = \lambda,$$

que no se anula para $\lambda \neq 0$. Como $T(x) \neq 0$, la homotopía no se anula para ningún valor de λ . Claro que esto no dice mucho si Ω es una bola y n es impar,

por ese teorema peludo que decía, justamente, que no puede haber campos tangentes nunca nulos. Ya que hablamos de Hopf, cabe recordar que sus ideas son las mismas que alumbraron el teorema de Poincaré-Hopf, de donde el teorema de la bola peluda se deduce de inmediato. (ver, por ejemplo xxxxxxxxxxxx). Como sea, en $\mathbb{C}$ los discos peludos se peinan sin problema, como los muchachos de antes, que no usaban gomina. Lo mismo ocurre con cualquier región que sea el interior de una curva simple; por eso, no está mal terminar con un argumento un poco más formal para el resultado anterior. Para fijar ideas (¡nunca mejor dicho!) supongamos, como antes, que $\eta : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ es una curva cerrada suave, que además es simple y está orientada positivamente. Se puede suponer (siempre hay una homotopía a mano) que hay un único punto de la curva en el que la segunda coordenada alcanza su valor mínimo y, por comodidad, también se puede suponer que eso ocurre para $t = 0$, como se ve en la Figura 5.

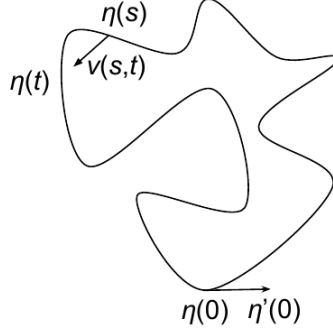


Figura 5: un peinado de índice 1

Ahora para $0 \leq s < t < 1$ consideramos el campo

$$v(s, t) := \frac{\eta(t) - \eta(s)}{|\eta(t) - \eta(s)|}.$$

que está bien definido y se extiende en forma continua a todo el triangulito $\Delta := \{0 \leq s \leq t \leq 1\}$. En efecto, para $s_0 < 1$ es claro que

$$\lim_{s, t \rightarrow s_0, t > s} v(s, t) = \frac{\eta'(s_0)}{|\eta'(s_0)|}$$

y

$$\lim_{s \rightarrow s_0, t \rightarrow 1^-} v(s, t) = \frac{\eta(1) - \eta(s_0)}{|\eta(1) - \eta(s_0)|} = - \frac{\eta(s_0) - \eta(0)}{|\eta(s_0) - \eta(0)|}$$

porque la curva es cerrada. Esto muestra que también vale

$$\lim_{s \rightarrow 0^+, t \rightarrow 1^-} v(s, t) = - \frac{\eta'(0)}{|\eta'(0)|}.$$

En definitiva, v es continua y no se anula en Δ , de modo que su grado es 0. Pero este grado se calcula como el índice de $v \circ \xi$, donde ξ es una parametrización del borde: esto quiere decir que si medimos el argumento de $v \circ \xi$ (es decir, el ángulo con el semieje $x > 0$), al completar la vuelta a $\partial\Delta$ tiene que dar igual a 0. Pero ahora miremos lo que ocurre en el segmento vertical $(0, t)$: a medida que aumentamos t el ángulo va tomando valores en $[0, \pi]$ hasta llegar a $t = 1$, donde vale π . De la misma forma, observamos que en el segmento horizontal $(s, 1)$ el ángulo siempre está en $[\pi, 2\pi]$ y en el punto $(1, 1)$ llega justamente a 2π . Esto significa que si ahora nos movemos por la diagonal (s, s) desde $s = 0$ a $s = 1$, el ángulo varía entre 0 y 2π . Pero $v(s, s) = \frac{\eta'(s)}{|\eta'(s)|}$, lo que prueba que el índice de $\frac{\eta'}{|\eta'|}$ (y en consecuencia el de η') vale 1.

Con esto, ya que hablamos de círculos terminamos de redondear, tanto el resultado sobre el problema de Kepler como el curso. ¡Y brindemos, nomás, la última copa!

References

- [1] Paper Rafa
- [2] Solimini xxxxxxxx